

## Modelo de Dagum de distribuição pessoal do rendimento: uma aplicação às receitas familiares em Portugal <sup>2</sup>

Como é sabido, foi Pareto (1895, 1896, 1897) o primeiro autor a debruçar-se sobre modelos probabilísticos que melhor reflectissem uma distribuição empírica de rendimento. Muitos trabalhos surgiram posteriormente sobre o mesmo tema; destes destacam-se, pela importância de que ainda hoje se revestem, os que apontam as distribuições lognormal e gama como leis de probabilidade mais próximas do fenómeno que procuram descrever.

O modelo de Pareto continua, porém, a ser o que mais fielmente traduz uma distribuição empírica no que respeita à sua aba superior. Todavia, quando estendido aos rendimentos mais baixos, manifesta insuficiências que limitam fortemente a sua utilidade.

Por seu lado, as leis lognormal e gama falham ao tentarem descrever rendimentos pertencentes a qualquer uma das abas de uma distribuição empírica, facto tanto mais limitativo quanto é certo que esses são, justamente, os rendimentos mais relevantes com vista ao cálculo de medidas de desigualdade na repartição, ou ainda para efeitos de definição de uma política de rendimentos; daí as restrições que impendem sobre o uso daquelas duas leis.

Com o modelo que concebeu, Camilo Dagum (1977a) pretendeu chegar a uma solução fundamentada, simples, flexível, bem ajustável a qualquer tipo de distribuição empírica e contendo parâmetros susceptíveis de interpretação económica precisa.

No presente trabalho descreve-se esse modelo e dá-se conta dos resultados da sua aplicação às receitas familiares em Portugal em 1973-74, discriminadas por zonas rurais e urbanas das regiões-plano, conforme estatísticas presentemente facultadas pelo INE (1977). Encontra-se dividido em três partes: Na primeira — «O modelo» — referem-se os requisitos e as principais propriedades; na segunda — «Estimação dos parâmetros» — aborda-se o método adoptado e os resultados obtidos; na última — «Con-

---

<sup>1</sup> Assistente na Faculdade de Economia do Porto.

<sup>2</sup> Este trabalho beneficiou da colaboração do Eng. César Mosqueira Alves e do Dr. Fernando Trigo, do Laboratório de Cálculo Automático da Faculdade de Ciências do Porto, a quem se agradece o contributo prestado quanto a comentários de esclarecimento relativos à sub-rotina AJSNL 1 e sua aplicação aos dados analisados.

clusões» — faz-se um balanço dos méritos e deméritos revelados pelo modelo.

## 1. O MODELO

### 1.1 REQUISITOS

A repartição dos rendimentos em países desenvolvidos ou em vias de desenvolvimento evidencia, segundo Dagum, as seguintes regularidades, que constituem os requisitos a satisfazer por um modelo teórico que pretenda descrevê-la:

- I) Distribuição geralmente unimodal com assimetria positiva;
- II) Existência de rendimentos nulos ou negativos, próprios de elementos desempregados que não disponham de qualquer fonte de receita (subsídio de desemprego, por exemplo) ou de proprietários com rendimentos líquidos negativos;
- III) Existência de um rendimento mínimo, no caso de a população em estudo ser composta por elementos empregados da população activa (ou ainda no caso de ser constituída pelos membros que restam de toda a população após exclusão dos que possuem rendimentos nulos ou negativos). Quando assim for, o intervalo que contém os valores observados é do tipo  $[x_0, +\infty[$ , com  $x_0 > 0$ ;
- IV) Elasticidade rendimento da diferença  $F(x) - \alpha$ , onde  $F(x)$  representa a função distribuição e  $\alpha$  a sua ordenada na origem ( $\alpha < 1$ ), monotonamente decrescente em relação a  $F(x)$ , e tendo como limites os valores  $\beta\delta$  ( $\beta\delta > 0$ ) e zero quando o rendimento tende para zero e infinito, respectivamente. Dito de outro modo, a uma dada taxa de crescimento do rendimento correspondem taxas de crescimento de  $F(x) - \alpha$  sucessivamente menores e ditadas pela própria função distribuição  $F(x)$ .

A expressão matemática da condição IV) é:

$$\frac{d \log [F(x) - \alpha]}{d \log x} = \beta\delta \left[ 1 - \left( \frac{F - \alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/\beta} \right]$$

com  $\beta$  e  $\beta\delta$  positivos.

Por outro lado, as condições II) e III) implicam, respectivamente,  $0 \leq \alpha < 1$  e  $\alpha < 0$ . No primeiro caso, a expressão acima define-se para  $x > 0$ ; no segundo, para  $x > x_0 > 0$ , vindo neste caso  $F(x_0) = 0$ .

Por último, o requisito I) exige  $\beta\delta > 1$ . Se  $0 < \beta\delta \leq 1$ , a distribuição é amodal, hipótese admissível na circunstância particular de o modelo se limitar a descrever a aba dos rendimentos mais elevados ou se aplicar a rendimentos de países subdesenvolvidos e sobrepovoados.

Em resumo,

$$\frac{d \log [F(x) - \alpha]}{d \log x} = \beta\delta \left[ 1 - \left( \frac{F - \alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/\beta} \right] \quad (1)$$

com  $\beta > 0$ ,  $\alpha < 1$  e  $\beta\delta > 1$ , entendendo-se esta expressão definida para  $x > 0$  se  $0 \leq \alpha < 1$  e  $x > x_0 > 0$  [ $F(x_0) = 0$ ] se  $\alpha < 0$ .

A solução da equação (1) é

$$F(x) = \alpha + \frac{1 - \alpha}{(1 + \lambda x^{-\delta})^\beta} \quad \lambda > 0 \quad (2)$$

## 1.2 PROPRIEDADES

Sendo  $0 \leq \alpha < 1$ , o rendimento pode considerar-se uma v. a. mista  $X$  com probabilidade  $\alpha$  no ponto 0 e densidade de probabilidade

$$f(x) = (1 - \alpha) \beta \lambda \delta x^{-\delta-1} (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta-1} \quad (3)$$

para  $x > 0$ .

No caso de  $\alpha < 0$ , o rendimento constituirá uma v. a. contínua cuja f. d. p. tem a expressão (3) para  $x > x_0$ .

Pode demonstrar-se (C. Dagum, 1977c) que o  $k^{\text{ésimo}}$  momento ordinário é, para  $k < \delta$ ,

$$E(X^k) = (1 - \alpha) \beta \lambda^{k/\delta} B(1 - k/\delta; \beta + k/\delta), \text{ se } 0 \leq \alpha < 1$$

e

$$E(X^k) = (1 - \alpha) \beta \lambda^{k/\delta} B[\lambda/(\lambda + x_0^\delta); 1 - k/\delta, \beta + k/\delta], \text{ se } \alpha < 0$$

onde  $B$  é a função beta (completa) e  $B(t_0; 1 - k/\delta, \beta + k/\delta)$  é a função beta (incompleta) assim definida:

$$B(t_0; 1 - k/\delta, \beta + k/\delta) = \int_0^{t_0} t^{-k/\delta} (1 - t)^{\beta-1+k/\delta} dt, \quad 0 \leq t_0 < 1$$

Pode também provar-se que o percentil de ordem  $p$  é

$$x_p = \lambda \left[ \left( \frac{1 - \alpha}{p - \alpha} \right)^{1/\beta} - 1 \right]^{-1/\delta} \quad \alpha < p$$

e

$$x_p = 0 \quad , \quad p \leq \alpha < 1$$

A moda vem dada por

$$x_M = \lambda \left( \frac{\beta \delta - 1}{\delta + 1} \right)^{1/\delta} \quad , \quad \beta \delta > 1$$

sendo as expressões da curva de Lorenz e do índice de Gini para  $0 \leq \alpha < 1$ , respectivamente,

$$L(y) = \frac{B(y^{1/\beta}; \beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta)}{B(\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta)}, \text{ com } y = \frac{F(x) - \alpha}{1 - \alpha} \text{ e } \beta\delta > 1$$

e

$$G = (2\alpha - 1) + (1 - \alpha) \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(2\beta + 1/\delta)}{\Gamma(2\beta) \Gamma(\beta + 1/\delta)}$$

onde, no segundo membro da última igualdade,  $\pi$  representa a função gama.

Em C. Dagum (1977b) podem ver-se as expressões da curva e do índice atrás referidos para  $\alpha < 0$ .

Verifica-se também que

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial \delta} < 0, \quad \beta > 0 \text{ e } \beta\delta > 1.$$

As desigualdades anteriores permitem interpretar os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ . O primeiro é um indicador do desequilíbrio na repartição do rendimento, visto ser  $G$  uma sua função crescente. Adicionalmente, quando  $0 \leq \alpha < 1$  e os rendimentos analisados provierem exclusivamente do trabalho, aquele parâmetro informa sobre a proporção de desemprego (representado por um rendimento nulo) na colectividade em causa. Os dois restantes parâmetros são indicadores de igualdade na repartição, na medida em que o índice de Gini com eles varia em sentido inverso.

Quanto a  $\lambda$ , trata-se de um parâmetro de escala, ligado portanto à unidade de medida adoptada para o rendimento.

Uma importante propriedade do modelo dado por (2) é a sua convergência em distribuição para a lei de Pareto, com  $x$  suficientemente grande. Foi já referido que tal lei é, de um modo geral, reconhecida como especialmente eficaz ao descrever a aba superior de uma distribuição empírica. O mesmo mérito deve, pois, atribuir-se ao modelo de Dagum. A demonstração da convergência pode ver-se em C. Dagum (1977a).

## 2. ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

### 2.1 MÉTODO ADOPTADO

Em regra, as leis de probabilidade que se utilizam no ajustamento a distribuições empíricas exprimem-se por meio de funções transcendentais que, na fase da estimação dos parâmetros através do método dos mínimos quadrados ou da máxima verosimilhança, resultam num sistema de equações não lineares. Este não é, todavia, um inconveniente insuperável, dadas as facilidades actuais em matéria de cálculo automático.

C. Dagum (1977a) propõe, a este respeito, cinco soluções, entre as quais sugere diversos algoritmos simples susceptíveis de fornecer as estimativas de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\lambda$ . No presente trabalho optou-se pela estimação através do método dos mínimos quadrados, tendo-se para o efeito recorrido à sub-rotina AJSNL 1 (César M. Alves, 1973), que, resumidamente, se passa a expor.

A aplicação do método dos mínimos quadrados traduz-se na minimização da função

$$S(p_1, p_2, p_3, p_4) = \sum_{i=1}^n [F(x_i; p_1, p_2, p_3, p_4) - y_i]^2$$

onde  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4$  representam, respectivamente, os valores atribuídos a  $\alpha, \beta, \delta$  e  $\lambda$ .

A detecção do mínimo opera-se, no método da descida mais rápida, por deslocações sucessivas no sentido do maior decrescimento da função, o qual é oposto ao do gradiente. Isto é,

$$\Delta p_i = -k \frac{\partial S}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

com  $k$  convenientemente escolhido.

De modo diferente, no método de Newton procede-se a deslocações sucessivas com vista a atingir um ponto de gradiente nulo, usando-se para tal a fórmula dos acréscimos finitos, ou seja,

$$\sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \Delta p_i = - \frac{\partial S}{\partial p_j}$$

O método da descida mais rápida é seguido quando, na tentativa de chegar a um ponto de mínimo de uma função, se parte de um ponto afastado. Contudo, a sua aplicabilidade exige (condição teórica) a convergência para 0 da matriz  $M^m$ , em que

$$M = \left\| \delta_{ij} - k_1 \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \right\| \quad \begin{array}{l} \delta_{ij} = \text{símbolo de Krönecher} \\ k_1 = \text{valor de } k \text{ na primeira iteração} \end{array}$$

e

$m$  = número de ordem da iteração,

visto serem os erros  $\epsilon_1^m = p_1^m - \alpha, \dots, \epsilon_4^m = p_4^m - \pi$  ao fim da  $m$ .ésima iteração as componentes do vector  $\bar{\epsilon}^m$  dado por

$$\bar{\epsilon}^m = M^m \bar{\epsilon} \quad \text{com } \bar{\epsilon}^m = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_4^m \end{bmatrix} \quad \text{e } \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^0 \\ \vdots \\ \epsilon_4^0 \end{bmatrix}$$

Exige ainda (condição prática destinada a assegurar uma convergência rápida para o vector nulo de  $\bar{\epsilon}^m$ ) que o quociente do maior pelo menor dos valores próprios da matriz

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \right\| \quad i, j = 1, \dots, 4$$

não exceda um limite que é determinado simultaneamente pelo número de iterações  $p$  e pela fracção do erro inicial que, no máximo, o erro após a  $p$ .<sup>ésima</sup> iteração deve representar.

As condições indicadas podem constituir entraves à utilização do método, pois nem sempre a sua verificação estará garantida.

Por tal motivo, efectua-se na sub-rotina AJSNL 1, antes de cada iteração, a mudança de variáveis

$$p_i = p_i^m + \sum_j H_j^1 U_j$$

onde, como atrás,  $p_i^m$  representa  $p_i$  na iteração de ordem  $m$  e os coeficientes  $H_j^1$  são fixados de modo a ser a matriz

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial u_i \partial u_j} \right\|$$

diagonal com valores próprios iguais a 1 ou  $-1$ . Aplica-se seguidamente o método da descida mais rápida nas variáveis  $U_j$  com  $k = 1$ .

Nestes termos, prova-se (César M. Alves, 1973) que a aplicação de tal método produz, na vizinhança do ponto de mínimo, resultantes equivalentes aos que se obtêm com o método de Newton.

Na eventualidade de o valor 1 sistematicamente dado a  $k$  conduzir a um ponto que «exceda» o do mínimo, procede-se à divisão sucessiva por potências de 2 das variáveis  $U_j$ , até que a função  $S$  apresente um valor mais baixo.

A subrotina prossegue de iteração em iteração até que  $S$  se estabilize no mínimo.

## 2.2 RESULTADOS

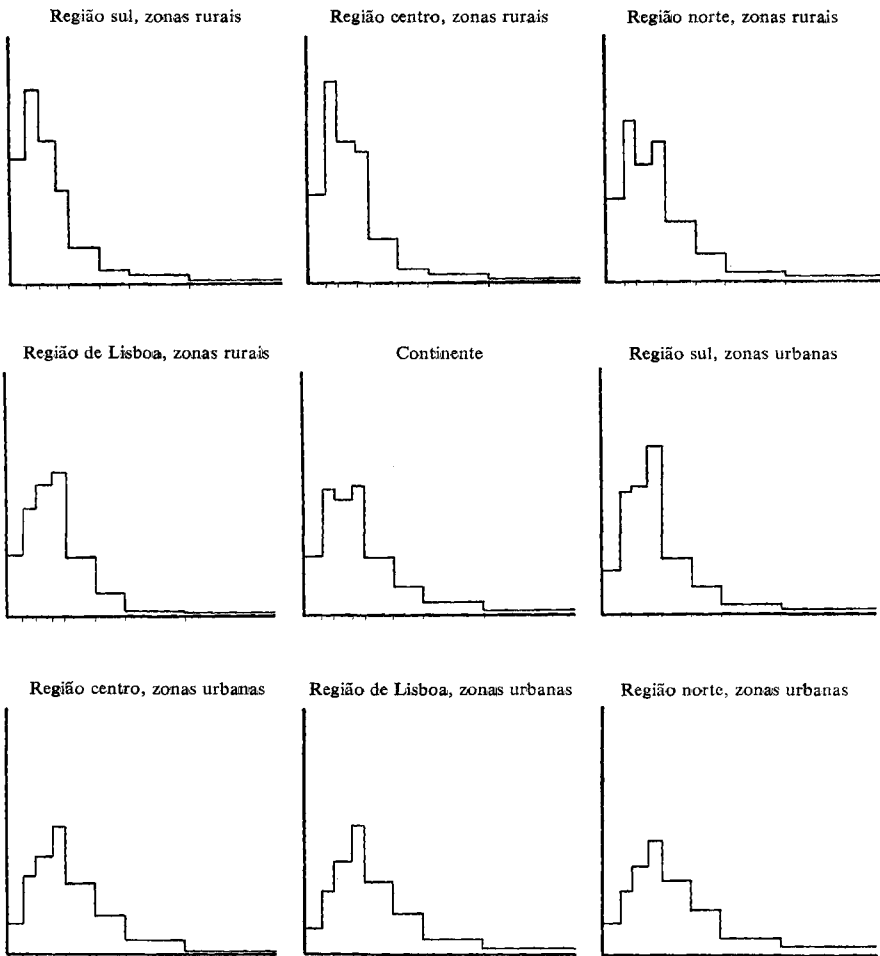
Os dados a que se aplicou o modelo de Dagum foram, conforme já ficou dito, extraídos do inquérito promovido em 1973-74 pelo INE às despesas e receitas familiares no continente, dividido em zonas urbanas e rurais de regiões-plano. O leitor poderá aperceber-se do modo como as famílias inquiridas se distribuíam pelas diversas classes de receita anual através da figura 1, onde, além de um histograma relativo a todo o território abrangido, se representaram os histogramas respeitantes às diversas zonas-região, ordenadas por valor crescente da receita média familiar.

Observa-se, da representação relativa às zonas rurais da região sul até à que respeita às zonas urbanas da região norte, um processo de deslocação gradual para a direita do centro de gravidade das distribuições empíricas que pode, sinteticamente, caracterizar-se como segue:

- i) Reforço do peso relativo das classes à direita da classe modal inicial (18 a 30 contos) até ao aparecimento de uma nova classe modal (48 a 60 contos) coexistente com a primeira (ver histograma da região norte/zonas rurais);
- ii) Extinção da classe modal inicial, mantendo embora as classes à esquerda da nova classe modal um peso relativo importante (caso das zonas rurais da região de Lisboa);

**Receitas familiares anuais observadas nas zonas rurais e urbanas das regiões-plano: histogramas**

[FIGURA 1]



*Nota* -- As receitas familiares (em abcissas) exprimem-se em 1000 escudos e agrupam-se nas seguintes classes: [0; 18[ [18; 30[ [30; 48[ [48; 60[ [60; 90[ [90; 120[ [120; 180[ [180; +00[.

- III) Acentuação gradual do peso relativo das classes com receitas superiores a 60 contos em detrimento das que se situam à esquerda da classe de 48 a 60 contos, que vêem a sua importância relativa diminuir (ver histogramas das zonas urbanas desde a região sul até à região norte).

O histograma do continente reflecte as condições regionais a que obedece a distribuição das receitas familiares, designadamente no tocante às duas classes modais atrás referidas, que nele sobressaem com bastante nitidez.

Os resultados do ajustamento do modelo de Dagum a estes dados (como vimos, expressos em 1000 escudos) estão incluídos nos quadros n.ºs 1, 2 e 3. No primeiro indicam-se as estimativas pelo método dos mínimos quadrados dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\delta$ ; no segundo mostram-se os valores estimados da receita média, da receita mediana e do índice de Gini; no último apontam-se algumas medidas da bondade de ajustamento.

[QUADRO N.º 1]

Regiões (zonas)	Estimativas			
	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$\delta$
Norte (zonas urbanas) .. .. .	0,044 2	1,845 5	2 916,7	2,061 0
Norte (zonas rurais) .. .. .	-0,092 5	0,326 6	1 576 800	3,339 9
Centro (zonas urbanas) .. .. .	0,031 3	1,404 2	8 726,2	2,298 8
Centro (zonas rurais) .. .. .	-0,267 7	0,245 2	2 340 200	3,563 1
Lisboa (zonas urbanas) .. .. .	0,042 7	1,963 7	3 982,2	2,161 0
Lisboa (zonas rurais) .. .. .	0,080 6	1,312 3	24 515	2,666 8
Sul (zonas urbanas) .. .. .	0,033 3	1,347 3	9 918,3	2,445 9
Sul (zonas rurais) .. .. .	-0,010 2	0,371 8	206 650	3,107 4
Continente .. .. .	0,029 4	0,905 1	13 597	2,400 8

[QUADRO N.º 2]

Regiões (zonas)	Estimativas		
	Receita média	Receita mediana	Índice de Gini
Norte (zonas urbanas) .. .. .	100,82	67,59	0,482 6
Norte (zonas rurais) .. .. .	52,59	43,03	0,395 8
Centro (zonas urbanas) .. .. .	82,90	61,37	0,423 6
Centro (zonas rurais) .. .. .	43,30	35,90	0,369 1
Lisboa (zonas urbanas) .. .. .	93,30	66,59	0,437 0
Lisboa (zonas rurais) .. .. .	58,39	47,70	0,413 0
Sul (zonas urbanas) .. .. .	64,95	41,85	0,407 5
Sul (zonas rurais) .. .. .	37,93	30,06	0,413 8
Continente .. .. .	66,16	48,41	0,439 0



Regiões (zonas)	$\varepsilon$		$\Sigma \varepsilon^2$	$\Sigma u^2$
	Mínimo	Máximo		
Norte (zonas urbanas) ... ..	-0,010 4	0,007 0	0,000 26	0,000 848
Norte (zonas rurais) .. ..	-0,024 4	0,018 7	0,001 17	0,003 762
Centro (zonas urbanas) ... ..	-0,014 9	0,011 3	0,000 42	0,001 425
Centro (zonas rurais) ... ..	-0,018 3	0,018 8	0,000 82	0,002 519
Lisboa (zonas urbanas) ... ..	-0,014 3	0,012 1	0,000 41	0,001 429
Lisboa (zonas rurais) ... ..	-0,015 3	0,014 3	0,000 53	0,001 610
Sul (zonas urbanas) .. ..	-0,028 7	0,030 8	0,001 92	0,006 521
Sul (zonas rurais) ... ..	-0,003 4	0,004 5	0,000,04	0,000 161
Continente ... ..	-0,017 6	0,014 3	0,000 61	0,001 926

No último quadro,  $\varepsilon$  define-se por

$$\varepsilon = [F(e) - \hat{F}(e)]^2$$

em que  $F(e)$  e  $\hat{F}(e)$  representam, respectivamente, os valores da função distribuição teórica e empírica no extremo de classe  $e$  ( $e = 18, 30, \dots, 180$ ).

Ainda no mesmo quadro,  $u$  é dado por

$$u = [f(x) - \hat{f}(x)]^2$$

onde  $f(x)$  e  $\hat{f}(x)$  indicam, respectivamente, as probabilidades teórica e empírica na classe de que  $x$  é o valor representativo ( $x = 9, 24, \dots, 240$ ).

As colunas dos somatórios  $\Sigma \varepsilon^2$  e  $\Sigma u^2$  revelam diferentes graus de bondade do ajustamento, podendo, de um modo geral, verificar-se que a capacidade de o modelo descrever as várias distribuições observadas é, apesar de muito aceitável, inferior à que o seu autor registou nos casos por si estudados (C. Dagum, 1977a). Infirmam esta tendência os resultados do ajustamento relativos às zonas rurais da região sul, onde a fidelidade em que o modelo reflecte a distribuição observada é quase absoluta. Saliente-se ainda que o segundo melhor ajustamento se dá nas zonas urbanas da região norte.

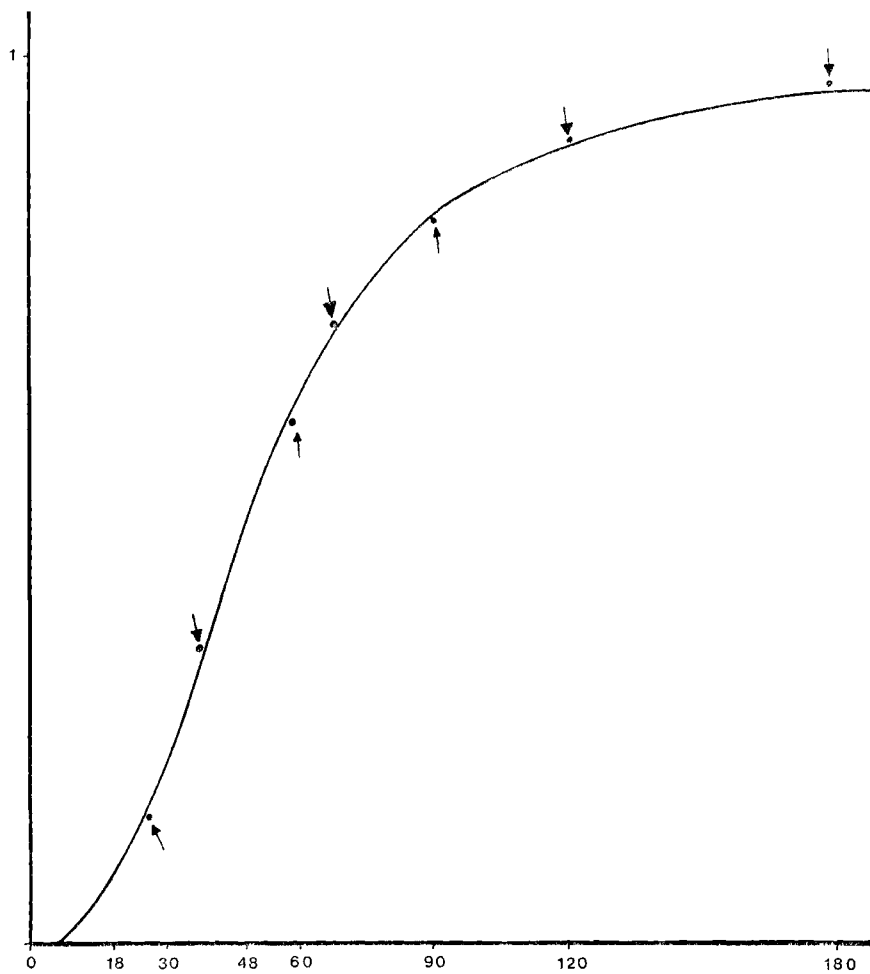
Para melhor elucidação do leitor, traçaram-se nas figuras 2 e 3 as curvas de distribuição teórica referentes às situações extremas quanto a bondade de ajustamento (as já citadas zonas rurais da região sul e as zonas urbanas da mesma região), tendo-se ainda assinalado os pontos das curvas de distribuição empírica correspondentes aos extremos de classe.

Ocorre perguntar: qual a razão por que o modelo «falha»<sup>3</sup> quando se passa das zonas rurais da região sul para as restantes zonas consideradas? A resposta reside justamente no processo a que atrás se aludiu a propósito da elevação interzonas da receita média familiar. De facto,

<sup>3</sup> O insucesso é meramente relativo e tem como referência as medidas de bondade de ajustamento mencionadas por Dagum nos seus trabalhos.

### Curva de distribuição (teórica) para as zonas rurais da região sul

[FIGURA 2]

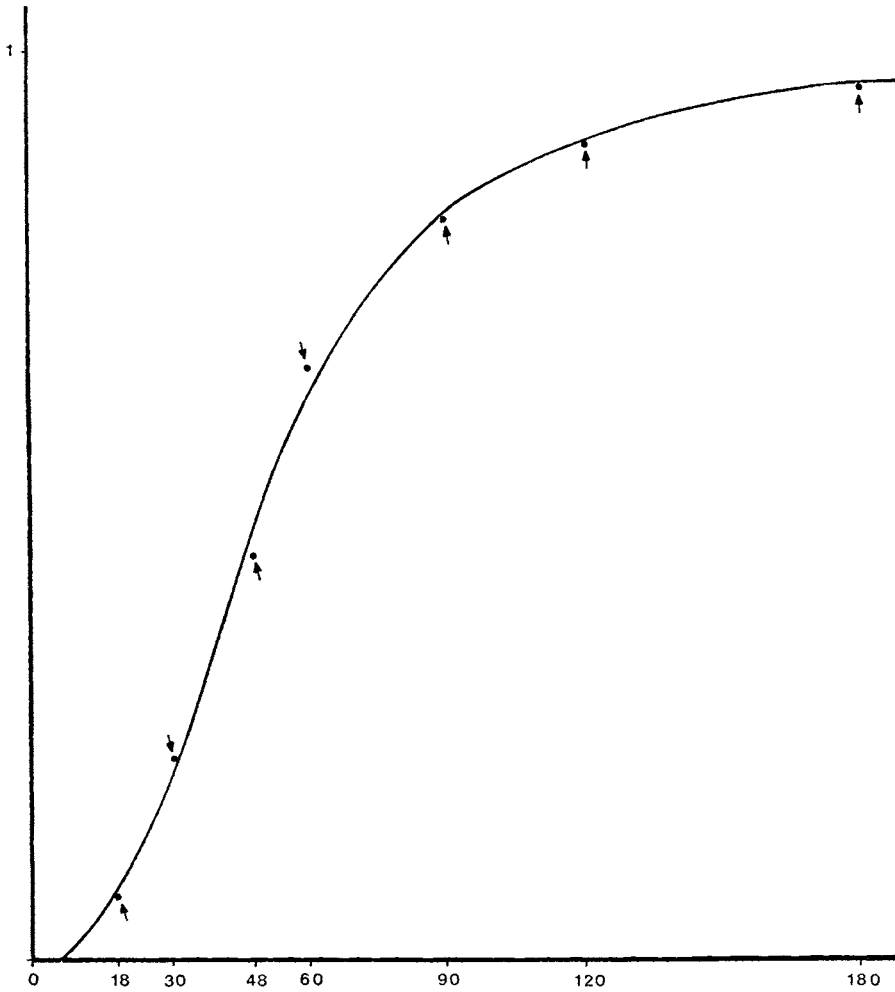


x = receitas anuais em 1000 escudos.

*Nota* — As setas assinalam os pontos da curva de distribuição empírica correspondentes aos extremos de classe.

Curva de distribuição (teórica) para as zonas urbanas da região sul

[FIGURA 3]



x = receitas anuais em 1000 escudos.

*Nota* — As setas assinalam os pontos da curva de distribuição empírica correspondentes aos extremos de classe.

as distorções que se produzem nas distribuições empíricas, em simultâneo com a deslocação para a direita do respectivo centro de gravidade, colidem com os fundamentos do modelo de Dagum e, designadamente, com o pressuposto IV mencionado em 1.1, restringindo deste modo a validade da equação (1) e sua solução (2). Tal é particularmente visível nas zonas urbanas da região sul, onde os desvios da distribuição empírica perante as regularidades subjacentes ao modelo teórico atingem a sua expressão máxima; a partir daí, isto é, nas restantes zonas urbanas, encontram-se distribuições razoavelmente próximas do modelo teórico, destacando-se a distribuição final do referido processo de deslocação (a que respeita às zonas urbanas da região norte) como a mais aproximada.

### 3. CONCLUSÕES

Partindo do que considera as regularidades patentes na distribuição pessoal do rendimento em países desenvolvidos ou em vias de desenvolvimento, C. Dagum construiu uma equação diferencial como sua expressão matemática e de cuja resolução obteve um modelo de repartição de rendimento.

Trata-se, pois, de um modelo fundamentado num conjunto de proposições que traduzem aquilo que, segundo aquele autor, caracteriza, por via de regra, a distribuição do rendimento nos referidos países; é um modelo razoavelmente parcimonioso, visto que contém quatro parâmetros; permite uma interpretação económica de todos esses parâmetros; admite processos de estimação simples, ainda que de um grau de simplicidade inferior ao dos modelos concorrentes de dois parâmetros; é um modelo flexível, no sentido de contemplar os casos em que *a*) há rendimentos nulos ou negativos, *b*) existe um rendimento mínimo de valor indeterminado à partida e *c*) a distribuição é unimodal ou amodal, com função densidade estritamente decrescente; é, finalmente, um modelo que, para rendimentos elevados, converge em distribuição para a lei de Pareto.

A sua capacidade de ajustamento a distribuições empíricas veio a revelar-se, no presente trabalho, inferior à que Dagum verificou nos casos por si estudados. Com efeito, aplicado aos dados do INE relativos à repartição das receitas familiares em 1973-74 nas amostras colhidas em zonas urbanas e rurais das várias regiões-plano, o modelo não conseguiu, de um modo geral, confirmar o excelente poder de ajustamento anunciado pelo seu autor. Este facto é de atribuir à (relativa) ineficiência do modelo ao descrever distribuições integradas num processo de deslocação gradual para a direita do respectivo centro de gravidade, tal como o que se registou nas distribuições observadas. As distorções que um processo desses acarreta tiram validade ao pressuposto de que a elasticidade rendimento do excesso da função distribuição  $F(x)$  sobre a sua ordenada na origem  $\alpha$  é função monotonamente decrescente de  $F(x)$ , segundo a relação (1). Assim, a solução da equação diferencial que exprime tal pressuposto — isto é, o modelo teórico — deixa de constituir um poderoso meio de descrição de uma distribuição empírica.

## REFERÊNCIAS

- Camilo Dagum (1977a), *A New Model of Personal Income Distribution — Specification and Estimation*, Research Paper no. 7710, Universidade de Otava.
- Camilo Dagum (1977b), *El Modelo Log-Logístico y la Distribución del Ingreso en Argentina*. Destinado a publicação em *El Trimestre Económico*.
- Camilo Dagum (1977c), *A New Model of Income Distribution, the Lorenz Curve and the Gini Concentration Ratio*. Ainda não publicado em Junho de 1977.
- César M. Alves (1973), *Subrotina AJSNL I*, Laboratório de Cálculo Automático, Universidade do Porto.
- INE (1977), *Inquérito às Despesas Familiares/1973-74*, Lisboa, Serviços Centrais do Instituto Nacional de Estatística.
- Vilfredo Pareto (1895), «La legge della domanda», in *Giornale degli Economisti*, Janeiro de 1895, pp. 59-68.
- Vilfredo Pareto (1896), *Écrits sur la Courbe de la Répartition de la Richesse*, obras completas de Vilfredo Pareto publicadas sob a direcção de Giovanni Busino, Genebra, Librairie Droz, 1965.
- Vilfredo Pareto (1897), *Cours d'Économie Politique*, Lausana, Rouge. Nova edição de G. H. Bousquet e G. Busino (1964), Genebra, Librairie Droz.